

ההשפעה של למידת ראשית האלגברה בסביבה עתירת מחשב על השימוש שעושים תלמידים בייצוג סימבולי

רנה הרשקוביץ

rina.hershkovitz@weizmann.ac.il

מיכל טבח

michal.tabach@weizmann.ac.il

מכון ויצמן למדע

המעבר ממספרים לייצוג סימבולי, בהוראת ראשית האלגברה, מהווה נקודת קושי עבור תלמידים רבים. מחקר זה בוחן את הוראת ראשית האלגברה בסביבה בה השימוש בגיליון אלקטרוני (Excel) זמין בכל עת, ונתון לבחירתם של התלמידים. חומרי הלמידה מבוססים על קורס שפותח בפרוייקט מתימחשב, והותאמו לסביבת הלמידה הייחודית. המחקר נערך במהלך שנתיים עוקבות בשתי כיתות ז. נמצא כי לאורך השנה כולה תלמידים בוחרים להשתמש ב-Excel בייצוגים סימבוליים הנמצאים ברמות שונות, וגם בסביבת נייר ועיפרון, לעיתים במהלך באותה פעילות. כמו כן, נמצא כי בפעילויות דומות מבחינה מתמטית, הנערכות לקראת סוף השנה, תלמידים משתמשים בייצוג סימבולי ברמה גבוהה ללא צורך בתמיכת Excel.

האתגר בהוראת ראשית האלגברה בכיתה ז, טמון בקושי הכרוך במעבר מעיסוק בעולם המספרים והפעולות ביניהם (חשבון), לעולם האלגברי העוסק בהכללות, הנמקות, ותיאור תופעות כמותיות משתנות, ומשתמש בשפה סימבולית. במאמר זה נחקר דרך אחת להתמודדות עם האתגר, הנשענת על כוחו הטכנולוגי של הגיליון האלקטרוני. מטרה שנייה היא כי תלמידים יוכלו בסוף השנה להשתמש בייצוג הסימבולי המפורש ללא תמיכת המחשב – כלומר, הגיליון האלקטרוני ישמש כ"קב"ים" ללומדים, שאפשר לוותר עליהם בשלב מסוים. במסגרת מאמר זה נבחן את השינויים שחלו בשימוש בייצוג סימבולי אצל תלמידים שלמדו את ראשית האלגברה בסביבה עתירת מחשב.

רקע תיאורטי

למידת ראשית האלגברה מחקרים שונים הראו כי עבור תלמידים רבים המעבר מלימודי החשבון ללימודי האלגברה כרוך בקשיים מרובים (Ainley, 1996; Sutherland & Rojano, 1993). הקשיים נובעים הן מן הצורך לרכוש שפה סימבולית חדשה בעלת חוקים-תחביריים נוקשים (למשל, $2 \cdot 3x$ הם $6x$, אולם $2+3x$ אינם $5x$), והן מן הצורך להרחיב/לשנות מושגים קיימים (לדוגמה מושג השוויון משתנה מ"עליך לבצע פעולה", כמו בתרגיל $2 + 3 =$, ל"שקילות בין ביטויים", כמו בביטוי $2x + 3x = 5x$).

בפרוייקטים שונים פותחו תוכניות לימודים המנסות להקל על התלמידים את המעבר מחשבון לאלגברה בעזרת כלים ממוחשבים (למשל Hershkovitz et al, 2002; Kieran, 1992; Yerushalmy & Schwartz, 1993). נמצא כי גיליון אלקטרוני יכול להיות כלי מתווך המקל על המעבר מחשבון לאלגברה (Wilson, Bills and Ainley, 2005; Haspekian, 2003).

הכללה בעזרת ייצוג סימבולי מחקרים זיהו שלוש רמות של הכללה סימבולית אצל תלמידים בראשית האלגברה העובדים בסביבת נייר ועיפרון (Arcavi, 1995; Friedlander et al., 1989; Hershkowitz & Arcavi, 1990).

ברמה הראשונה, תלמידים נוטים לייצג כמויות בעזרת אותיות שונות, בלי להתחשב בקשרים הקיימים בין כמויות אלו. כך, למשל, זוג מספרים עוקבים יסומנו כ a ו- b (ולא כ a ו- $a+1$), אולי משום שמתייחסים לעובדה שהאות b מופיעה בסדר אלפאביתי אחרי האות a , ומתעלמים מהקשר המתמטי שאותו יש לייצג בצורה סימבולית. התבניות שנוצרות הן מרובות משתנים שאינם קשורים ביניהם ולכן אין טעם לפעול עליהן אלגברית.

ברמה השנייה, תלמידים לומדים לתאר קשרים בעזרת סמלים באופן חלקי בלבד. לדוגמה, זוג מספרים עוקבים יתוארו כ a ו- $a+1$, אולם קשרים אחרים, מורכבים יותר, יתוארו באופן שאינו מלא ותוך הכנסת אותיות נוספות. התבניות הנוצרות הן תבניות נסיגה מקומיות ולא כלליות. גם כאן אין טעם לפעול עליהן אלגברית בסביבת למידה של נייר ועיפרון.

ברמה השלישית תלמידים מסוגלים לתאר קשרים מלאים בין כמויות משתנות באופן סימבולי. התבניות הנוצרות הן תבניות מפורשות. אלו הן התבניות המתאימות לפעולות אלגבריות עליהן בכל סביבת לימוד שהיא.

בעוד שברמה הראשונה אין התלמידים מייצגים כלל הכללה של קשר בין כמויות משתנות, ברמה השנייה הם מייצגים סימבולית קשרים מקומיים, ואילו ברמה השלישית הם חושפים קשרים כלליים בין משתנים. בסביבת נייר ועיפרון, ביצוע פעולות אלגבריות על תבניות שאינן חושפות את מלוא הקשרים בין המשתנים אינו מוביל לתובנות חדשות, אם בכלל. כלומר, בסביבת נייר ועיפרון תבניות מפורשות הן בעלות עדיפות ברורה.

לעומת זאת, בסביבת גיליון אלקטרוני, ייצוגים סימבוליים בכל שלוש הרמות יכולים לשמש את התלמידים ככלים לקבלת הכמויות המשתנות בייצוגים הנומרי והגרפי. הכנסת תבניות מכל רמה ו"גרירה" שלהן לתאים סמוכים, מאפשרת את קבלת הייצוג הנומרי. קבלת הייצוג הגרפי פשוטה אף היא. כלומר, תבניות בעלות מספר משתנים, וכן תבניות נסיגה בסביבת אקסל יעילות כמו תבניות מפורשות.

כלומר, בסביבת גיליון אלקטרוני ניתנת לתלמידים אפשרות לפעול בייצוגים סימבוליים רבים ושונים, אשר חלקם פחות מתוחכמים. עובדה זו מעלה שתי שאלות: האם תלמידים אמנם עושים שימוש בייצוגים סימבוליים שונים? האם התלמידים הלומדים בסביבת גיליון אלקטרוני אכן משתמשים בבטיויים סימבוליים מן הרמה הראשונה והשנייה, ואם כן עד מתי? עד כמה הם משתמשים בתבניות מפורשות, המאפשרות עבודה גם בסביבת נייר ועיפרון?

מערך המחקר (אוכלוסיה, כלים, הליך)

זהו חלק ממחקר כיתה ארוך טווח, המתמקד בהוראה ולמידה של ראשית האלגברה בכיתה ז, לאורך שנת לימודים מלאה, בסביבה עתירת מחשב (סע"מ). ייחודיות סביבה עתירת מחשב זו מתבטאת: א. בזמינות המלאה של המחשב הן בכיתה והן בבית (במיוחד גיליון אלקטרוני), ב. בחופש של

התלמידים לבחור האם, מתי וכיצד להשתמש בו, ג. תכנון חומרי למידה תוך התחשבות בפוטנציאל של הגיליון לשימוש בייצוגים סימבוליים. המחקר עקב לאורך שנתיים (תשס"ד, תשס"ה) אחרי תלמידים בכיתה ז בבית ספר מבוסס במרכז הארץ. קבצי העבודה של 26 תלמידים בכל כיתה בכל הפעילויות שנערכו לאורך שנת הלימודים, הם מקור הנתונים למחקר זה. במסגרת המחקר השתמשו התלמידים בספרי הלימוד שפותחו במכון ויצמן במסגרת פרויקט *מתי מחשב*, ועברו התאמה לסביבת למידה ייחודית זו.

הקורס מורכב משרשרת של סיטואציות-בעיה עליהן עובדים הלומדים בדרך כלל בזוגות. מרבית הפעילויות אינן כוללות הכוונה לדרך אפשרית לשימוש בכלים הממוחשבים. כלומר, פנייה לעבודה עם מחשב היא פרי יוזמתם של התלמידים, והם הקובעים באיזו דרך לעשות בו שימוש.

הנורמות הסוציו מתמטיות שנוצרו בכיתות אלו (למשל, לבעיה יש יותר מדרך פתרון אחת, הפותר צריך להסביר את פתרונו למליאת הכיתה), עודדו את התלמידים למציאת דרכי פתרון המובנות להם. גם האפשרות לשימוש במחשב תרם לריבוי דרכי הפתרון.

ממצאים ודין

טבלה 1 מראה את הייצוגים הסימבוליים בהם השתמשו תלמידים משתי השנים בפעילות שנערכה בסוף ספטמבר. הפעילות לא כוללת הנחיות לשימוש בגיליון האלקטרוני.

טבלה 1: ייצוגים סימבוליים בקבצים של 26 זוגות תלמידים, סוף ספט.

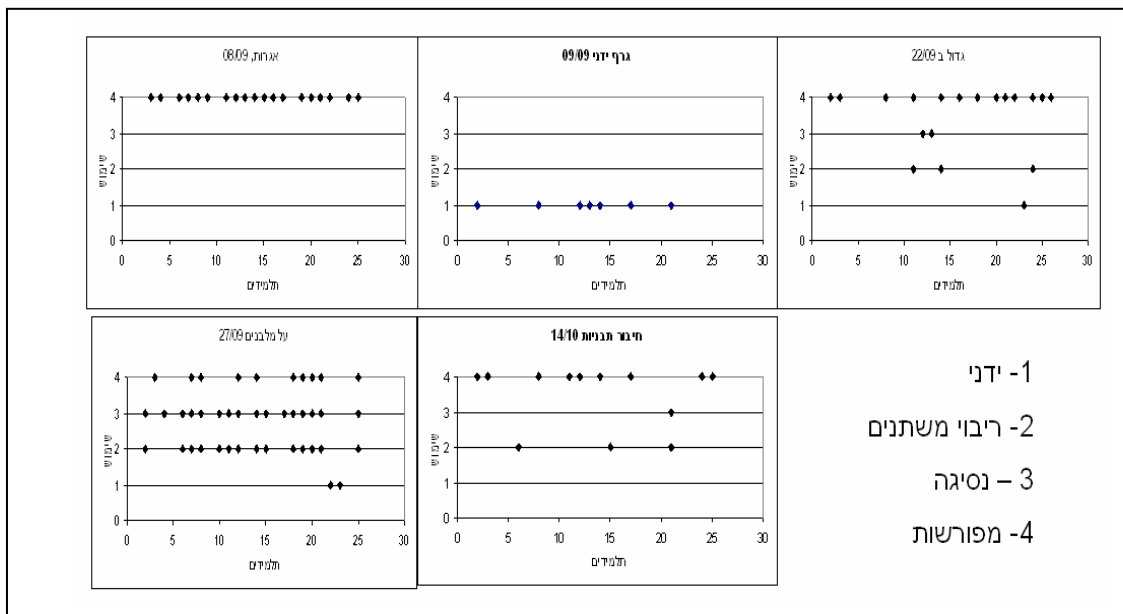
ס"ה"כ	מפורשות	נסירה	ריבוי משתנים	"ידני" במחשב	
50	15	13	20	2	"תבניות" במחשב

עיון בטבלה 1 מעלה מספר עובדות. שני זוגות נעזרו בגיליון האלקטרוני אך לא השתמשו בתבניות מסוג כלשהו, אלא בחרו להכניס נתונים בצורה ידנית למחשב. סך כל התבניות שאכן נמצאו (48) הוא כמעט כפול ממספר הקבצים שנמצאו. למעשה, כמעט כל זוג השתמש בשתי דרכים סימבוליות לייצוג הנתונים באותה פעילות! כלומר, תלמידים מפעילים יותר מדרך סימבולית אחת במהלך הפתרון של אותה בעיה עצמה. כמו כן, אם נתבונן בכלל הזוגות, נראה כי בכיתות אלו קיימות מספר דרכים שונות לפתרון בעזרת סימבולים, ואין דרך אחת "מקובלת". ניתן לראות בכך עדות כי בזמן מסוים במעבר לעולם הסימבולי תלמידים שונים נמצאים ברמות שונות. אפשרות זו לריבוי רמות מעדנות ומרככות את המעבר.

יתכן והממצא המפתיע בטבלה 1 הוא דווקא העמודה של התבניות המפורשות - תלמידים תיארו את הסיטואציה בייצוג המפורש שלה, ובכל זאת בחרו להשתמש בExcel.

נשאלת השאלה: האם פעילות זו חריגה מבחינת השימוש המגוון באקסל? לצורך מתן מענה לכך, נתבונן בייצוגים הסימבוליים שנמצאו בקבצי העבודה של התלמידים בחמש הפעילויות מששת השבועות הראשונים בשנה.

איור 1: שימוש בייצוג הסימבולי בחמש פעילויות בתחילת השנה

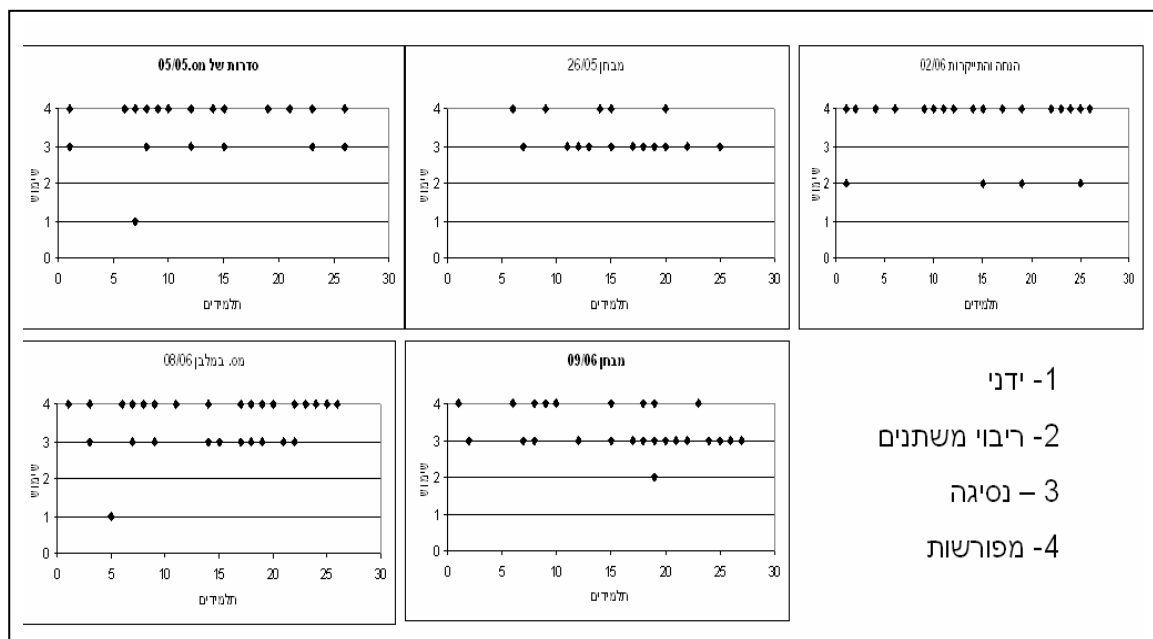


כל אחד מחמשת הגרפים המוצגים באיור 1 מתאר את השימוש בייצוגים הסימבוליים בפעילות אחת (תאריכי הפעילויות הם 08/09, 09/09, 22/09, 27/09, 14/10). בציר y מתוארים סוגי הייצוגים הסימבוליים שנמצאו, ובציר x מתוארים מספרים המייצגים את התלמידים. כל נקודה מתארת סוג של תבנית שנמצאה אצל תלמיד מסוים באותה הפעילות. עיון בגרפים מראה כי בפעילות הראשונה, בה נלמדה דרך העבודה עם גיליון אלקטרוני, נעשה שימוש בתבניות מפורשות, וזאת בהתאם להנחיות העבודה בפעילות. לעומת זאת, בארבע הפעילויות האחרות, בהן אין הכוונה לדרך השימוש (אם בכלל) במחשב, התלמידים אכן עושים שימוש בכל סוגי הייצוג הסימבולי. ניתן לראות כי בכיתה כולה עבור אותה פעילות יש דרכי עבודה המשתמשות במגוון ייצוגים, וכן קורה כי אותו תלמיד עושה שימוש ביותר מייצוג סימבולי אחד. כמו כן, תלמידים בוחרים ייצוגים סימבוליים שונים בפעילויות שנערכו בתאריכים סמוכים.

מגוון זה מעיד כי תלמידים אמנם מנצלים את חופש הבחירה העומד לרשותם. כלומר, תלמידים עובדים ברמות סימבוליות שונות, בהתאם ליכולתם / העדפתם.

שאלת השאלה, האם לא נוצרת תלות בשימוש במחשב? נתבונן, אם כן, באיור 2, המראה את השימוש בייצוגים הסימבוליים השונים בחמש פעילויות שנערכו במהלך ששת השבועות האחרונים בשנת הלימודים. הפעילויות המוצגות כאן הן אלו שבהן היה יחסית שימוש מרובה במחשב, כדי לבחון את הייצוגים הסימבוליים בהם השתמשו.

איור 2: שימוש בייצוג הסימבולי בחמש פעילויות בתום השנה



עיון בחמש הפעילויות מתום השנה (05/05, 26/05, 02/06, 08/06, 09/06) מראה כי גם בסוף השנה תלמידים שונים משתמשים באותה פעילות בייצוגים שונים. אולם, השימוש בייצוגים הידני ובריבוי המשתנים כמעט נעלם לחלוטין. גם כאן קיים הממצא כי בתאריכים קרובים תלמידים בוחרים בייצוגים סימבוליים שונים. האם הבחירה בייצוג הסימבולי תלויה בפעילות?

חיפשו פעילות שמבחינה מתמטית הייתה זהה בין תחילת השנה וסיומה. טבלה 2 מראה שתי פעילויות שנערכו באוקטובר ובמרס, הדומות מבחינה מתמטית.

כפי שניתן לראות בטבלה 2, חלה ירידה משמעותית במספר התלמידים העושים שימוש במחשב באותה פעילות כעבור כחצי השנה.

טבלה 2: שימוש במחשב בפעילויות דומות מבחינה מתמטית במועדים שונים, במספרי תלמידים ובאחוזים.

עם מחשב	ללא מחשב	
19, 73%	7, 27%	אוקטובר
6, 23%	20, 77%	מרס

במילים אחרות, יותר זוגות יכולים לבצע את אותה פעילות מתמטית בעזרת נייר ועיפרון בלבד. כלומר, הגיליון האלקטרוני אכן מתפקד כ"קביים" שאפשר להשתחרר מהן.

סיכום

התבוננות בקבצי העבודה מתחילת השנה של תלמידים שפעלו בסביבת גיליון אלקטרוני במהלך לימודיהם, מעלה מספר נקודות.

- באותה פעילות תלמידים משתמשים בייצוגים סימבוליים מגוונים.
- לעיתים קרובות אותו תלמיד משתמש במספר ייצוגים באותה סיטואציה, ובסיטואציות הנעשות בקרבת זמן.

בסביבה זו, המאפשר ללומדים בחירה בין רמות סימבוליות שונות, נוצר "רצף" בין הייצוג הנומרי לייצוג הסימבולי המפורש.

עבור מומחה, אין אבחנה בין היכולת לנסח קשר באופן מפורש ובין השימוש בניסוח זה. לעומת זאת, בראשית האלגברה, מדובר בשתי יכולות נפרדות. לגיליון האלקטרוני תפקיד מתווך, אם כן, גם עבור אותם תלמידים היכולים לבטא קשרים באופן מפורש, אך עדיין לא יכולים לפעול בעזרת ייצוג זה.

עיון בקבצי העבודה מסוף השנה מעיד כי לא נוצרת תלות במחשב:

- עבור אותה פעילות מתמטית, יש צמצום בשימוש במחשב במהלך השנה.
- כאשר משתמשים במחשב, השימוש בריבוי משתנים הולך ומתמעט.

אם נזכור כי מטרתנו היו מצד אחד לרכז את המעבר לעולם האלגברי, ויחד עם זאת להימנע מיצירת תלות בכלי הטכנולוגי, הרי שיש סימנים המעידים על הצלחה. למעשה, הגיליון האלקטרוני משמש לתמיכה – מעיין קביים הניתנים ללומדים, והם יכולים להשתחרר מהם בקצב שלהם לאורך השנה.

ביבליוגרפיה

- Ainley, J. (1996). Purposeful contexts for normal notation in spreadsheet environment. *Journal of Mathematics Behavior*, 15, 405-422.
- Arcavi, A. (1995). Teaching and learning algebra: Past, present and future. *Journal of Mathematical Behavior*, 14 (1), 145-162.
- Friedlander, A., Hershkowitz, R., & Arcavi, A. (1989). Incipient "algebraic" thinking in pre-algebra students. *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 283-290). Paris, France.
- Haspekian, M. (2003). Between arithmetic and algebra: a space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Pisa, Italy: Universita Di Pisa.
- Hershkowitz, R., & Arcavi, A. (1990). The interplay between student behaviors and the mathematical structure of problem situations - issues and examples. *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 193-200). Oaxtepec, Mexico.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., Schwarz, B.B., & Tabach, M. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer-researcher-teacher-learner activity. In L.D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 656 – 694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A Project of the National Council Teachers of Mathematics*, pp. 390-419, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.
- Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2005). Naming a column on a spreadsheet: Is it more algebraic? In D. Hewitt & A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 184-191). Warwick, U.K.
- Yerushalmy, Y & Schwartz, J. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on Graphical Representation of Functions* (pp. 41-68).