תיאוריה של היבטים פרקטיים אודות הוכחות בסביבת תוכנה סימבולית-גרפית

נורית זהבי
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
nurit.zehavi@weizmann.ac.il

גיורא מן
בית חנן
gioramann@013.net

Theory of Practical Aspects on Proof with Symbolic-Graphical Software

Giora Mann
Beit Chanan

Nurit Zehavi
Department of Science Teaching
Weizmann Inst. of Science

Abstract

This study explores the possibility of developing a praxeology (theory-of-practice) for teaching about proof in analytic geometry using a Computer Algebra System (CAS). The study focuses on the particular place of dynamic tools, namely, slider bars for proving statements related to tangents to conic sections. These dynamic tools enable the user to coordinate the symbolic and graphic representations of the software. The theoretical framework draws on Chevallard's anthropological approach to didactics of mathematics and Duval's analysis of transformations within and between semiotic representations. Teachers who participated in a professional development course (n = 43) were asked to prove algebraically unfamiliar results obtained by experimenting with slider bars. They were also asked to rate the need of asking students for an algebraic proof. Only 23 teachers produced a proof. Their proofs were classified according to two criteria: (a) type of insight in approaching the proof (arithmetic-geometric sense, symbol sense, symbol-graphic sense), and (b) the CAS facilities integrated in the proving process.

Keywords: Computer Algebra System, proof, praxeology, semiotic representation, slider bar.

תקציר

מחקר זה בודק את האפשרות לבניית תיאוריה-של-פרקטיקה (פרקסאולוגיה) להוראה אודות הוכחות בגיאומטריה אנליטית בסביבת תוכנה סימבולית-גרפית (CAS). הדגש בעבודה הוא על התפקיד המיוחד של כלים דינמיים, כלומר סרגלי גרירה, להוכחת משפטים העוסקים במשיקים לחתכי חרוט. כלים אלו מאפשרים לקשר בין הייצוג הסימבולי והייצוג הגרפי של התוכנה. המסגרת התיאורטית מתבססת על הגישה האנתרופולוגית של שוולרד לדידקטיקה של מתמטיקה ועל הניתוח שהציע דובל לגבי טרנספורמציות בתוך ובין ייצוגים סמיוטיים. מורים שהשתתפו בהשתלמות (n = 43) התבקשו להוכיח אלגברית תוצאות לא מוכרות שהתקבלו על-ידי התנסות עם סרגלי גרירה, וגם לדרג את הצורך לבקש מתלמידים הוכחה אלגברית לתוצאות שהתקבלו בייצוג הגרפי. רק 23 מורים הפיקו הוכחה. ההוכחות מוינו לפי שני קריטריונים: (א) סוג התובנה בבסיס ההוכחה (תובנה אריתמטית-גיאומטרית, תובנה סימבולית, תובנה סימבולית-גרפית), ו- (ב) מנגנוני התוכנה אשר שולבו במהלך ההוכחה.

מילות מפתח: תוכנה סימבולית-גרפית, הוכחה, תיאוריה-של-פרקטיקה, ייצוגים סמיוטיים, סרגל גרירה

מבוא

העבודה המתוארת במאמר זה נערכה במסגרת מחקר ופיתוח של חומרי לימוד מבוססי תוכנה סימבולית-גרפית מסוג Computer Algebra System (Zehavi & Mann 2003, 2005). בהשפעת מחקרים בסביבת תוכנות מסוג גיאומטריה אינטראקטיבית שילבנו פעילויות של חקירה דינמית על-ידי ניסוי, העלאת השערה והוכחה (זהבי ואחרים, 2007). חקירה דינמית, בתוכנת CAS, מתבצעת בעזרת סרגלי גרירה שפועלים על משתנים (פרמטרים) בתוך ביטויים אלגבריים. סרגל גרירה מאפשר להדגים, בצורה דינמית, כיצד משפיע שינוי ערכו של פרמטר בביטוי אלגברי על הייצוג הגרפי של הביטוי. במחקר שעסק במושג הפרמטר בלימוד אלגברה בעזרת CAS בהולנד (Drijvers, 2003), התלמידים התבקשו לברר השפעה של שינוי ערכי פרמטרים על הייצוג הגרפי תוך כדי ניסוי עם סרגל גרירה. התברר כי ההתנסות אינה מספיקה כדי לעודד אותם להוכיח את התוצאות שהתקבלו. נשאלת השאלה: מה מקומה של הוכחה מתמטית בסביבה ממוחשבת? שאלה זו מאתגרת מפתחי חומרי לימוד ומורים להציע פרקטיקות חדשות ללימוד על הוכחות.

במחקר שנתאר נעזרנו בגישה האנתרופולוגית לדידקטיקה של מתמטיקה שהוצעה על-ידי שוולרד (Chevallard, 1999). על-סמך גישה זו תיאוריה-של-פרקטיקה (praxeology) מאופיינת על-ידי שלושה מרכיבים: משימות בנושא הנלמד, שיטות לביצוע המשימות, ודיון מבוסס-תיאוריה על שיטות הביצוע. התפישה של מרכיבים אלו נבנית במסגרת השיח של השותפים בסביבה חינוכית מסוימת. הגישה של שוולרד עזרה לאנשי חינוך, שחקרו את השימוש ב- CAS בבתי ספר בצרפת, לנתח את הפרקטיקה החדשה שנוצרה עם הכנסת התוכנה ולהרחיב במיוחד את ההתייחסות לשיטות הביצוע של המשימות (Artigue, 2002, Lagrange, 2005). מונגהן, על-סמך מחקריו באנגליה ומחקרים נוספים, הדגיש את ההשפעה של ההעדפות שיש למורים בשימוש בכלי התוכנה על תפישתם את הפרקסאולוגיה (Monaghan, 2007).

יחד עם מורים שהשתתפו בהשתלמות על הוראת גיאומטריה אנליטית חקרנו את השימוש ב-CAS להצדקת השערות ולהוכחה אלגברית של תוצאות גיאומטריות, לא מוכרות, לגבי משיקים לחתכי חרוט. המורים התבקשו להוכיח את התוצאות הגיאומטריות שהתקבלו על-ידי התנסות עם סרגלי גרירה, בהסתמך על הביטויים האלגבריים שיוצרים את החקירה הדינמית – זהו עיקר החידוש בפרקטיקה. ניתחנו את עבודות המורים בעזרת המיון שהציע דובל (Duval, 2006) לגבי ייצוגים סמיוטיים (רגיסטרים) וטרנספורמציות בתוך ייצוג (טיפול treatment) ובין ייצוגים (המרה conversion). הרציונל למחקר הוא הצורך לבדוק, ביחד עם מורים, את האפשרות לבנות פרקסאולוגיה ללימוד אודות הוכחות במסגרת הוראת גיאומטריה אנליטית בסביבת CAS. במאמר נציג את המשימות שניתנו למורים, את שאלות המחקר, את התוצאות של הניסוי עם המורים ואת המסקנות לגבי פיתוח הפרקסאולוגיה.

מתודולוגיה

המוטיבציה למחקר על הוכחת משפטים בגיאומטריה אנליטית בסביבת תוכנה מתמטית צמחה משאלה 'תמימה' של מורים בקורס השתלמות: "האם אפשר לשרטט מנקודה במישור זוג משיקים להיפרבולה, אחד לכל זרוע?" בדיקת האפשרויות לענות על השאלה הובילה לזיהוי המקום הגיאומטרי של נקודות המקיימות את התכונה שציינו המורים לגבי היפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ (Mann et al, 2007). בהדרכת צוות הפיתוח, ובעזרת המנגנון הסימבולי של התוכנה, בנו המורים הצגה דינמית של הבעיה על-ידי סרגלי גרירה שפעלו על הפרמטרים בביטויים האלגבריים של שיעורי נקודות ההשקה. הפרמטרים בביטויים אלה הם שיעורי נקודת המוצא (P) של המשיקים. אנימציה של התנהגות המשיקים יצרה אפקט מרשים: כאשר גוררים את הנקודה מעבר לאסימפטוטה - אחד המשיקים מחליף את הזרוע שלה הוא משיק; כך מזהים את המקומות הגיאומטריים הרלוונטיים. המורים דרשו לראות הוכחה לתוצאות! הביטויים שהתקבלו עבור נקודות ההשקה היו 'מפחידים' ולכן הציעה אחת המורות (בעקבות Polya) לטפל תחילה בהיפרבולה פשוטה יותר, $x \cdot y=1$. המורים, כאמור, הם שותפינו לפיתוח ומחקר של משימות ושיטות העבודה בפרקטיקה החדשה. בעקבות ההצעה בנינו משימות למחקר שנערך בהשתלמות מורים נוספת. המורים המשתתפים (n = 43) לימדו גיאומטריה אנליטית ברמות 4-5 יח"ל; למרביתם היה רק ניסיון בסיסי בשימוש בתוכנה. כחלק מדרישות ההשתלמות התבקשו המורים לעבוד באופן יחידני

על המשימות בחדרי מחשבים ולהגיש את תשובותיהם בכתב על דפי המשימות (עם אפשרות לצרף קבצי מחשב).

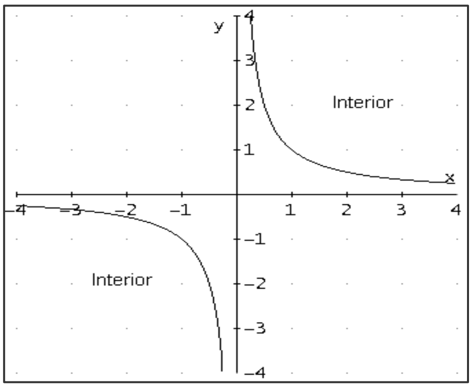
המשימות למורים וניתוחן

משימה 1.

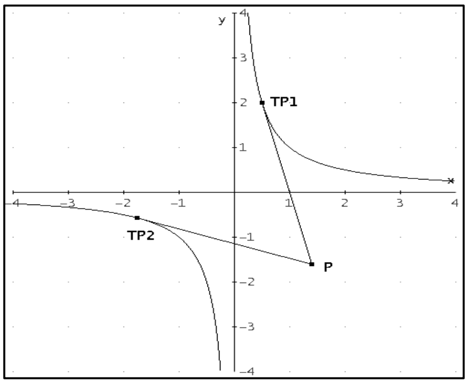
לפניכם שרטוט של ההיפרבולה $x \cdot y = 1$ (איור 1). האם דרך כל נקודה במישור, שאינה על האסימפטוטות, עוברים שני משיקים להיפרבולה? האם שני משיקים להיפרבולה מנקודה מסוימת משיקים לאותה זרוע של ההיפרבולה? הסבירו.

פתחו את הקובץ File1. דרך הנקודה P אשר שיעוריה מסומנים על-ידי (X, Y) עוברים שני משיקים להיפרבולה. נקודות ההשקה מסומנות על-ידי TP1 ו-TP2 (איור 2). היעזרו בהוראות שבקובץ והפעילו סרגלי גרירה עבור הפרמטרים X ו-Y להדגמה דינמית של המשיקים. זהו במישור את המקומות הגיאומטריים של נקודות מהן: לא ניתן לשרטט משיק; מהן ניתן לשרטט שני משיקים לאותה זרוע; מהן ניתן לשרטט שני משיקים, אחד לכל זרוע.

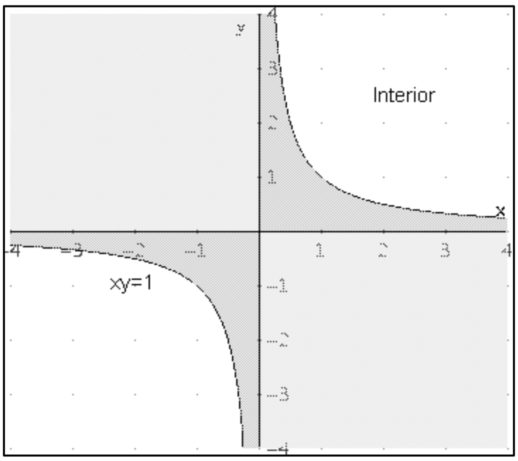
המשימה דורשת יצירתיות כי לא ניתנו כלים לעבודה. איור 3 מציג חלוקה של המישור על-ידי הגרף של ההיפרבולה $x \cdot y = 1$: מנקודות ב"פנים" של ההיפרבולה (אזורים לבנים) אין משיקים להיפרבולה; מנקודות באזורים הכהים יוצאים שני משיקים לאותה זרוע של ההיפרבולה; מנקודות באזורים האפורים יוצאים שני משיקים, אחד לכל זרוע. בנקודות על ההיפרבולה עובר משיק אחד; מנקודות על האסימפטוטות – צירי המערכת (פרט לראשית הצירים) יוצא משיק אחד להיפרבולה.



איור 1. שרטוט של ההיפרבולה



איור 2. זוג משיקים



איור 3. חלוקה של המישור על-ידי הגרף של ההיפרבולה

משימה 2.

הקובץ File2 מציג את הביטויים האלגבריים שיצרו את ההדגמה הדינמית. שיעורי P, נקודת המוצא של המשיקים, מיוצגים על-ידי *X, Y*. היעזרו בביטויים עבור שיעורי נקודות ההשקה כדי **להוכיח** את הממצאים במשימה 1.

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-X\cdot Y}}{Y} \qquad y_1 = \frac{\sqrt{1-X\cdot Y}+1}{X}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{1-X\cdot Y}+1}{Y} \qquad y_2 = \frac{1-\sqrt{1-X\cdot Y}}{X}$$

הביטויים של שיעורי נקודות ההשקה, ניתנו למורים כדי שלא יקדישו זמן רב לפיתוחן. הם התבקשו לעקוב אחרי השלבים האלגבריים ולהשלים צעדים חסרים. יש לציין כי הביטויים שהתקבלו על-ידי התוכנה אינם מתאימים למקרים הסינגולריים (כאשר $X = 0$ או $Y = 0$, כלומר הנקודה P על אסימפטוטה).

במטרה להציף את עמדותיהם של המורים לגבי הצורך בהוכחה הם התבקשו לדרג מ-1 עד 6 את עמדתם לגבי הצורך לבקש מתלמידים להוכיח בדרך אלגברית את התוצאות הגיאומטריות שהתקבלו בעזרת סרגלי גרירה, אחרי שעבדו על כל אחת משתי המשימות.

שאלות המחקר

במשימה 1 נחשפו המורים לאפקט הוויזואלי של התנהגות זוג משיקים להיפרבולה. *במשימה 2* הם קיבלו את הביטויים האלגבריים שיצרו את האפקט הגיאומטרי והתבקשו להשתמש בהם להוכחת הממצאים הגיאומטריים. ביטויים אלו מהווים מקור לרעיונות לבניית הוכחה.

שאלת מחקר 1:

האם בעקבות משימה 2 ישנו המורים את דירוג עמדתם לגבי הצורך לבקש מתלמידים להוכיח אלגברית את התוצאות הגיאומטריות שהתקבלו בדרך גרפית?

לפני ההדגמה הדינמית של התנהגות המשיקים במשימה 1 התבקשו המורים לנסות להסביר את הקשר בין מיקום נקודת המוצא של זוג משיקים לבין מיקום נקודות ההשקה.

שאלת מחקר 2:

מה תרומתם של הסברי המורים לתכנון משימות ולשיטות עבודה בחקירת התנהגות המשיקים?

משימה 2 כיוונה במפורש את המורים לפתח הוכחה של הממצאים הניסיוניים על-סמך הביטויים האלגבריים שאפשרו את הניסוי.

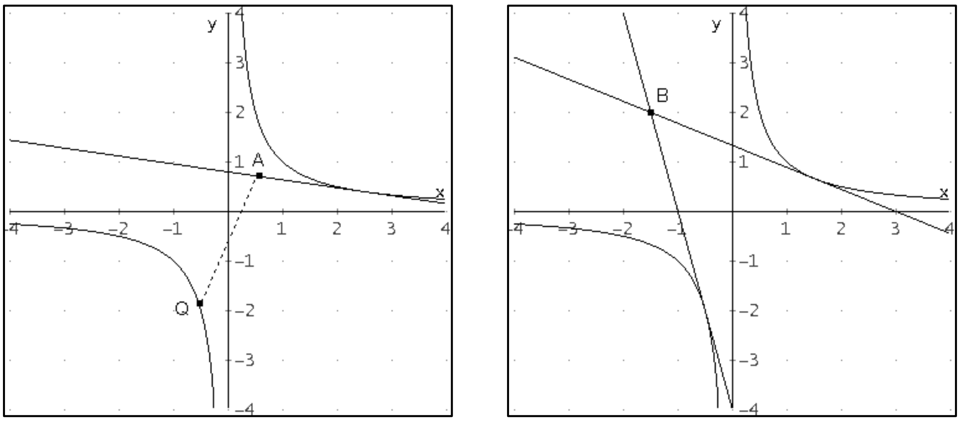
שאלת מחקר 3:

בהינתן הביטויים האלגבריים לשיעורי נקודות ההשקה –
א. האם המורים יגיעו להוכחה? ב. האם נקבל יותר מהוכחה אחת? ג. כיצד נמיין את ההוכחות?

תוצאות

בהתייחס לשאלת המחקר הראשונה לגבי התפלגות דירוג המורים את הצורך בהוכחה אלגברית אחרי כל אחת מהמשימות, התברר כי מחצית המורים לא שינו את דירוגם אחרי שהתמודדו עם ההוכחה. לגבי האחרים, 12 מורים העלו את הדירוג ואילו 10 מורים הקטינו אותו. בתור קבוצה לא היה שינוי בדירוג בין שתי המשימות, אבל היו שינויים פנימיים בכל רמות הדירוג. למשל, 20 מורים קבעו דירוג של 6-5 במשימה 1, ו-22 מורים קבעו דרוג כזה במשימה 2; ואולם רק 12 מורים נתנו דירוג זה בשתי המשימות. אין לנו מספיק מידע לסיבות השינוי בשני הכיוונים במיוחד לגבי מורים שלא הצליחו למצוא הוכחה; זו שאלה למחקר נוסף.

בהקשר לשאלת מחקר 2 נביא כאן דוגמא לסוג ההסבר הסטנדרטי שנתנו רוב המורים במשימה 1. (היו גם מספר תשובות יותר מקוריות.) המורה U בחר בגישה גיאומטרית והתרכז בשיפועי המשיקים. ״כל משיק להיפרבולה הוא בעל שיפוע שלילי. שרטטתי משיק לענף ברביע הראשון (איור 4). לא יתכן שישר דרך A ברביע הראשון (או ברביע השלישי) יהיה משיק לענף של ההיפרבולה ברביע השלישי (או הראשון, בהתאמה). ואכן לגבי נקודה Q ברביע השלישי הישר AQ הוא בעל שיפוע חיובי. לכן שני משיקים העוברים דרך A נוגעים באותו ענף. לגבי נקודה B ברביע השני (או הרביעי), יש רק ישר אחד דרך B שהוא בעל שיפוע שלילי ומשיק לענף של ההיפרבולה (איור 4). לכן כל משיק העובר דרך B נוגע בענף אחר.״ ניתן לעבד ולארגן את שיקולי המורה לסדרת משימות לתלמידים וגם להוביל לייצוג אנליטי של מושג השיפוע. מורה זה דרג (3) את הצורך בהוכחה אלגברית, ונימק: ״התלמידים צריכים ללמוד לתקשר במוסכמות של הדיסציפלינה״.



איור 4. משיקים ושיפועים

השאלה המעניינת ביותר היא שאלת מחקר 3. רק כמחצית מהמורים (23) הציגו הוכחה במשימה 2. שלושה חברים מצוות הפיתוח והמחקר של חומרי הלימוד קראו את כל ההוכחות והציעו קריטריונים למיון. על-סמך ההצעות שלהם נקבעו שני קריטריונים: (א) סוגי התובנות בבסיס ההוכחה, ו-(ב) מנגנוני התוכנה אשר שולבו במהלך ההוכחה. בין ההוכחות זיהינו שלוש שיטות שונות להוכחה: שיטה המבוססת על תובנה אריתמטית-גיאומטרית שניתנה על-ידי 10 מורים (שיטה 'נאיבית' לפי דברי אחד מהם); שיטה שנקודת המוצא שלה היא תובנה סימבולית (ניתנה על-ידי 8 מורים) המזהה בביטויים האלגבריים המתארים את שיעורי נקודות ההשקה מבנה אלגברי מוכר $(a+b)(a-b)$; שיטה המסתמכת על תובנה סימבולית-גרפית שהוצעה על-ידי 5 מורים, אותה נפרט בהמשך. הקריטריון לשימוש במנגנוני התוכנה בהוכחה כלל ארבעה אופנים: ללא שימוש בתוכנה, שימוש במנגנון הגרפי בלבד, שימוש במנגנון הסימבולי בלבד, ושימוש משולב במנגנונים הסימבולי והגרפי .

נביא כאן את תשובתו של המורה F, שצבר ניסיון בעבודה עם התוכנה. הוא דירג (6) את צורך בהוכחה אלגברית אחרי כל אחת משתי המשימות. אחרי משימה 1 הוא טען שהדגמה ויזואלית לא מחליפה הוכחה פורמלית. מורה זה התבסס על תובנה משולבת סימבולית-גרפית והתחיל את תשובתו למשימה 2 בהתייחסות לרביעים השני והרביעי. כדי לאשר אלגברית שאזורים אלו הם אכן המקום הגיאומטרי של נקודות מהן יוצאים משיקים לשתי הזרועות, הוא פישט בעזרת התוכנה את אי-השוויון שאומר כי תוצאת המכפלה של שיעורי x של נקודות ההשקה היא מספר שלילי. ואכן תוצאת הפישוט של אי השוויון $x_1 \cdot x_2 < 0$ התקבלה באופן אוטומטי על-ידי התוכנה: $\frac{X}{Y} < 0$. התרגום של אי-השוויון שהתקבל בייצוג הסימבולי לייצוג גרפי הוא האיחוד של הרביע השני והרביע הרביעי. מרוצה וקצת גם מופתע מהתוצאה הוא התבונן בביטויים האלגבריים המייצגים את שיעורי נקודות ההשקה: ״אם בוחנים את המבנה האלגברי של הביטויים שקיבלנו ב-File2, אין זה מפתיע שקיבלנו שני ייצוגים אלגבריים שונים לאיחוד של שני הרביעים״.

דיון ומסקנות

בסקירה כללית על הוכחות, הסברים וחקירה הדגישה חנה (Hanna, 2000) כי התפקיד העיקרי של הוכחות בכיתה הוא לשפר הבנה מתמטית על-ידי הסבר מפורש של כל הקישורים בין השלבים של פעילות מתמטית. ואכן, ההוכחה האלגברית מספקת תובנות חדשות לבעיה ומקשרת את שני הייצוגים בצורה מעניינת. הניתוח של דובל עוזר לפרש את המעברים משלב לשלב בהוכחה. דובל (2006) מדגיש את הקושי שיש לתלמידים בהבנת המרות שאינן "חופפות" בין ייצוגים סמיוטיים. נדגים זאת בעזרת עבודתו של המורה F. המורה המיר את הייצוג הדיסקורסיבי "השקה לשתי זרועות" לייצוג דיסקורסיבי שונה "אותם סימנים לשיעורי נקודת ההשקה", שאותו המיר (המרה לא חופפת) לאי-השוויון $x1 \cdot x2 > 0$. בעזרת התוכנה הוא בחר לבצע לאי-השוויון טיפול, כלומר 'פישוט' לאי-השוויון ל- $\frac{X}{Y} < 0$. בשונה מטיפול ידני, הטיפול על-ידי ה-CAS מתבצע בשלב אחד. אם כך התוכנה מאפשרת הוכחה במספר שלבים קטן, ואז המיקוד של הלומד הוא על המעברים בין השלבים ולא על הפרטים הטכניים של כל שלב. מורים אחרים, ששילבו בין המנגנון האלגברי והגרפי, העדיפו להמיר תחילה את אי-השוויון $x1 \cdot x2 < 0$ לייצוג הגרפי (איחוד של הרביע השני והרביעי) בעזרת שרטוט של משוואות 'סתומות' (שאינן מבוטאות על-ידי פונקציה). זוהי המרה לא חופפת, ולכן המשיכו לבצע גם טיפול על-ידי פישוט אלגברי, בעזרת התוכנה, לחיזוק דידקטי של השכנוע.

בעקבות ההתנסות שתיארנו לעיל, לגבי התנהגות משיקים להיפרבולה, אנו מציעים מבנה לפרקסאולוגיה אודות הוכחות בסביבה סימבולית-גרפית:

משימות

- זיהוי נושא מתאים;
- ניסוח שאלות מובילות;
- תכנון התנסויות דינמיות בסביבה הטכנולוגית.

שיטות לביצוע משימות הוכחה

- בניית הנוסחאות עבור הכלי הדינמי (סרגל גרירה) על-ידי המפתחים ו/או על-ידי הלומדים;
- התנסות והעלאת השערות;
- הצדקה ברמות שונות;
- מאמץ להגיע להוכחה שמתבססת על הנוסחאות שיצרו את ההתנסות הדינמית.

הבסיס התיאורטי

- ההתנסות הדינמית מובילה להשערות אצל הלומדים ולניסיון להצדקתן;
- הסבר הצעדים של בניית הנוסחאות יכול לעזור בהבנת המעברים בהוכחה;
- בניית הוכחה אלגברית מבוססת על הנוסחאות שמשמשות בחלק הדינמי;
- זיהוי תובנות סימבוליות במהלך ההוכחה מאפשר להרחיב את קבוצת המשימות;
- מגוון המשימות, שיטות הביצוע וההוכחות תלוי בשותפים בסביבה החינוכית המסוימת.

לסיכום, תוכנה סימבולית-גרפית היא כלי מתמטי חזק מאד שמאפשר טיפול בתחום האלגברה והמרות 'מרשימות' לייצוג במערכת הצירים, ולכן בפרקסאולוגיה זו הכלי הטכנולוגי נותן העדפה להוכחות בעלות אופי אלגברי. תובנה סימבולית של המבנים האלגבריים עוזרת לנתח את הביטויים ולהרחיב את סוגי הבעיות, גם אם הם נראים 'מפחידים' כמו בדוגמא שיצרה מוטיבציה להוכחות בהשתלמות המורים. הייצוג הגרפי מוכר למורים רבים משימוש במחשבונים או תוכנות עם מנגנון לשרטוט גרפים וגם מהתנסות בתוכנות מסוג גיאומטריה אינטראקטיבית. שילוב מושכל של ייצוג סימבולי וייצוג גרפי מאפשר לפתח משימות לא מוכרות יחד עם שיטות לביצוע המשימות.

מקורות

זהבי, נ', מן, ג' ודנא-פיקרד, נ' (2007). מה לומדים כאשר משנים את נקודת המבט על חתך חרוט? **על"ה** 11 עלון למורי מתמטיקה, (עמ' 22-31).

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*, 221-266.

Drijvers, P. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment.* Utrecht. The Netherlands: Freundenthal Institute.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Lagrange, J.B. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers in Mathematical learning*, *10*, 143-189.

Mann, G., Dana-Picard, T., & Zehavi, N. (2007). Technological discourse on CAS-based operative knowledge. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*, 113-120.

Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*, 63-72.

Zehavi, N. & Mann, G. (2003). Task design in a CAS environment: Introducing (in)equations. In J. Fey (Ed.) *Computer Algebra in Secondary Education*, 173-191. Reston VA: NCTM

Zehavi, N. & Mann G. (2005). Instrumented techniques and reflective thinking in analytic geometry, *The Montana Mathematics Enthusiast*, *2*, 83-92.